RINGKASAN SKRIPSI

MODUL PERKALIAN

SAMSUL ARIFIN

04/177414/PA/09899

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL

UNIVERSITAS GADJAH MADA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

YOGYAKARTA

2008

HALAMAN PENGESAHAN

Ringkasan Skripsi

MODUL PERKALIAN

Telah dipersiapkan dan disusun oleh

Samsul Arifin

04/177414/PA/09899

Telah dipertahankan di depan Tim Penguji

pada tanggal 31 Desember 2008

Indah Emilia W., Dr., M.Si.	Sutopo S.Si., M.Si.
Pembimbing I	Pembimbing II

1. Latar Belakang Masalah

Dalam teori modul dikenal modul khusus yang disebut modul perkalian (*multiplication module*). Jika diberikan R adalah ring komutatif dengan elemen satuan dan M adalah R-modul uniter, maka M disebut modul perkalian jika untuk setiap submodul N di R-modul M terdapat ideal presentasi I di ring R sehingga berlaku $N = IM$.

Ideal I di ring R disebut ideal prima jika ideal I adalah ideal sejati $\left(I \neq R\right)$ dan untuk setiap $a, b \in R$ berlaku jika $ab \in I$ maka $a \in I$ atau $b \in I$. Selanjutnya, dengan memandang R sebagai modul atas dirinya sendiri (R adalah R-modul), maka perkalian $ab \in I$ dapat dipandang sebagai bentuk perkalian $a \in R$ (R sebagai ring) dan $b \in R$ (R sebagai modul), sehingga jika I ideal prima maka berlaku $a \in I$ atau $b \in Ann_R\left(R/I\right)$. Hal ini memotivasi adanya definisi submodul prima pada R-modul M. Selanjutnya, N disebut submodul prima di R-modul M jika N merupakan submodul sejati $\left(N \neq M\right)$ dan untuk setiap $r \in R$, $m \in M$ berlaku jika $rm \in N$ maka $m \in N$ atau $r \in Ann_R\left(M/N\right)$.

Ring R disebut ring prima jika $\{0\}$ adalah ideal prima di ring R. Dengan cara yang sama, yaitu dengan memandang R sebagai modul atas dirinya sendiri (R adalah R-modul), maka hal ini juga memotivasi adanya definisi modul prima pada R-modul M, yaitu R-modul M disebut modul prima jika $\{0\}$ adalah submodul prima di R-modul M.

Dalam skripsi ini akan dipelajari modul perkalian dan sifat-sifatnya, dan juga kaitan antara sifat-sifat submodul prima dalam modul perkalian. Akan dipelajari juga sifat-sifat dari ideal prima dan ring prima mana saja yang dapat dibawa ke sifat-sifat submodul prima dan modul prima.

2. Submodul Prima dan Modul Prima

Sebelum memasuki pembahasan mengenai modul perkalian, akan dikemukakan terlebih dahulu mengenai pembahasan submodul prima, baik itu pengertian maupun sifat-sifatnya, kemudian dilanjutkan dengan pembahasan mengenai modul prima.

Definisi 1 (Submodul Prima)

Diberikan M adalah R-modul dan N submodul di M. N disebut submodul prima jika N merupakan submodul sejati M dan untuk setiap $r \in R$, $m \in M$ *berlaku jika* $rm \in N$ *maka* $m \in N$ *atau* $r \in (N:M)$ *dengan* $(N:M) = \{r \in R \mid rM \subseteq N\}$.

Definisi submodul prima tersebut dapat dinyatakan juga dengan kalimat sebagai berikut :

Untuk sebarang R-modul M dan N submodul di M, N disebut submodul prima jika N merupakan submodul sejati dan untuk setiap $r \in R$, $m \in M \setminus N$ *berlaku jika* $rm \in N$ *maka* $r \in (N:M)$

Definisi 2 (Submodul Prima Lemah)

Submodul sejati N di R-modul M disebut submodul prima lemah jika untuk suatu $r \in R$, $m \in M$ *berlaku jika* $0 \neq rm \in N$ *maka berlaku* $m \in N$ *atau* $r \in (N:M)$ *dengan* $(N:M) = \{r \in R \mid rM \subseteq N\}$

Jika *M* adalah *R*-modul maka untuk $N = \{0\}$ diperoleh $(\{0\}:M) = \{r \in R \mid rM = 0\}$. Perhatikan bahwa submodul $\{0\}$ di *R*-modul *M* selalu submodul prima lemah, karena untuk setiap $r \in R$, $m \in M \setminus \{0\}$, jika $rm \neq 0$ maka $r \in (\{0\}:M)$. Akan tetapi $\{0\}$ belum tentu submodul prima pada R-modul M karena terdapat $r \in R,\ m \in M \setminus \{0\}$, dengan $rm = 0$ tetapi $r \notin (\{0\} : M)$.

Jika N submodul prima maka N submodul prima lemah, karena :

1) Jika $N = \{0\}$ maka jelas bahwa N submodul prima lemah
2) Jika $N \neq \{0\}$ maka untuk suatu $r \in R,\ m \in M$ jika $0 \neq rm \in N$ berlaku $m \in N$ atau $r \in (N : M)$.

Dengan demikian, jelas bahwa setiap submodul prima merupakan submodul prima lemah, tetapi setiap submodul prima lemah belum tentu submodul prima.

Definisi 3 (Modul Prima)

Jika diberikan M adalah R–modul, maka M disebut R-modul prima jika $\{0\}$ *adalah submodul prima di R–modul M.*

Di bawah ini merupakan sifat-sifat dari submodul prima dan modul prima.

Teorema 4

Untuk suatu R-modul M, submodul K di R-modul M, dan ideal annihilator $(K : M) = Ann_R(M / K)$ *di ring R, maka pernyataan berikut ekuivalen :*

(i) *K submodul prima.*

(ii) *Setiap submodul tak nol di R-modul* $M \setminus K$ *memiliki annihilator yang sama, yaitu* $(K : M)$.

(iii) *Untuk setiap submodul V di M dan subring A di R, jika* $AV \subseteq K$ *maka* $V \subseteq K$ *atau* $A \subseteq (K : M)$.

(iv) *Untuk setiap submodul* $K \subset W$ *di M,* $K \neq W$*, dan* $(K:M) \subset B$*, B subring di R, jika* $(K:M) \neq B$ *maka* $WB \subsetneq K$.

Kejadian khusus dari Teorema 3.1.6 di atas adalah jika untuk kondisi *(iii)* dan *(iv)*, yaitu *A* dan *B* masing-masing adalah ideal di ring *R* maka keempat pernyataan tersebut masih tetap ekuivalen.

Akibat 5

M disebut R-modul prima jika dan hanya jika setiap submodul tak nol di M memiliki annihilator yang sama, yaitu $Ann_R(M)$.

Sebagai kejadian khusus dari Akibat 5 di atas, yaitu jika $M = R$ dan $K = L$ maka akan diperoleh teorema di bawah ini.

Teorema 6

Untuk sebarang ideal L di ring R, maka pernyataan berikut ekuivalen :

1) *Untuk setiap* $a,b \in R$*, jika* $ab \in L$ *maka* $a \in L$ *atau* $b \in L$.
2) *Untuk setiap ideal* A,B *di ring R, jika* $AB \subseteq L$ *maka* $A \subseteq L$ *atau* $B \subseteq L$.
3) *Untuk sebarang* $L \subset A$ *di ring R,* $L \neq A$ *dan* $L \subset B$*, jika* $L \neq B$ *maka* $AB \subsetneq L$.

Pernyataan-pernyataan pada Teorema 3.1.8 tersebut, sama halnya dengan mengatakan bahwa *L* adalah ideal prima di ring *R*.

Teorema 7

Misalkan L ideal prima di ring R, dan P ideal di ring R dengan $P = (L:R) \subseteq L$*, maka berlaku hal-hal sebagai berikut :*

1) *Jika* $a,b \in R$ *sehingga* $ab \in L$ *dan* $a \notin L$ *maka* $b \in P$.
2) $(L:R) \equiv \{c \in R \mid cR \subseteq L\} = L$.

Teorema 8

Jika K adalah submodul prima di R-modul M dan $\left(K:M\right)=Ann_R\left(M/K\right)$*, maka berlaku hal-hal sebagai berikut :*

1) *Jika* $RM \subsetneq K$ *maka* $\overline{K}\equiv\left\{m\in M \mid Rm\subseteq K\right\}=K$.
2) $\left(K:M\right)$ *adalah ideal prima.*
3) $\left(\left(K:M\right):R\right)\equiv\left\{c\in R \mid cR\subseteq\left(K:M\right)\right\}=\left(K:M\right)$.

3. Modul Perkalian

Pada bagian ini akan dibahas mengenai pengertian dan sifat-sifat modul perkalian. Pertama akan diberikan definisi dari modul perkalian yang kemudian dilanjutkan dengan sifat dan teorema yang berkaitan dengan sub bahasan tersebut. Selanjutnya dibahas kaitan sifat-sifat submodul prima pada modul perkalian.

Definisi 9 (Modul Perkalian)

Diberikan M adalah R-modul. Modul M disebut modul perkalian jika untuk setiap submodul N di M terdapat ideal I di ring R sehingga berlaku $N=IM$.

Ideal *I* disebut ideal presentasi dari submodul *N*, atau secara singkat disebut presentasi dari submodul *N*. Selanjutnya himpunan $\Pr(N)=\left\{I\subseteq R \mid N=IM,\forall N\subseteq M\right\}$ adalah himpunan dari semua ideal presentasi dari submodul *N*. Dari Definisi 9 di atas, jelas bahwa setiap submodul dari *R*-modul *M* memiliki ideal presentasi jika dan hanya jika *M* adalah *R*-modul perkalian.

Lemma 10

M adalah R-modul perkalian jika dan hanya jika untuk setiap $m \in M$ *, terdapat ideal I di ring R sehingga berlaku* $Rm = IM$ *.*

Lemma 11

Diberikan M adalah R–modul perkalian. Jika N adalah submodul di R-modul M maka berlaku $N = (N : M)M$ *.*

Definisi 12 (Hasil kali)

Diberikan M adalah R-modul. N dan K masing-masing merupakan submodul-submodul di modul perkalian M dengan $N = I_1M$ *dan* $K = I_2M$ *untuk suatu ideal-ideal* I_1 *dan* I_2 *di ring R. Hasil kali dari submodul N dan submodul K ditulis NK dan didefinisikan dengan* $NK = I_1I_2M$ *.*

Perlu diketahui bahwa definisi perkalian pada modul perkalian di atas berbeda dengan definisi perkalian ideal biasa. Kemudian, jika diberikan M adalah R-modul perkalian, maka untuk setiap $a,b \in M$, perkalian ab didefinisikan sebagai hasil kali antara (Ra) dan (Rb). Lebih jelasnya :

$$ab = (Ra)(Rb).$$

Kemudian, karena $(Ra) = \langle a \rangle$ dan $(Rb) = \langle b \rangle$ masing-masing adalah submodul yang dibangun oleh setiap $a,b \in M$ maka terdapat ideal I (ideal presentasi dari (Ra)) dan ideal J (ideal presentasi dari (Rb)) di ring R (karena M adalah R-modul perkalian) sehingga berlaku $(Ra) = IM$ dan $(Rb) = JM$.

Berdasarkan definisi hasil kali elemen-elemen $a_1, a_2, ..., a_n$ di R-modul perkalian tersebut, maka dari Definisi 3.2.5 di atas diperoleh :

$$
\begin{aligned}
a_1 a_2 ... a_n &= (Ra_1)(Ra_2)...(Ra_n) \\
&= (I_1 M)(I_1 M)...(I_n M) \\
&= (I_1 I_1 ... I_n) M \\
&= I' M \\
&= N'
\end{aligned}
$$

untuk suatu ideal $I_1, I_1, ..., I_n$ di ring R dan submodul *N'* dengan ideal presentasinya adalah $I' = I_1 I_1 ... I_n$, yang artinya perkalian elemen-elemen di R-modul perkalian M akan menghasilkan suatu submodul.

Selanjutnya, dalam R-modul M untuk setiap $r \in R$, $m \in M$ dan ideal I pada ring R terlebih dahulu didefinisikan bentuk-bentuk perkalian, yaitu sebagai berikut :

1) rM

$$
\begin{aligned}
&= \left\{ \sum_{i=1}^{n} r m_i \mid m_i \in M \right\} \\
&= \left\{ r \sum_{i=1}^{n} m_i \mid m_i \in M \right\} \\
&= \left\{ r (m_1 + m_2 + ... + m_n) \mid m_i \in M \right\} \\
&= \left\{ rm' \mid m' \in M \right\}
\end{aligned}
$$

2) Rm

$$
\begin{aligned}
&= \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i m \mid r_i \in R \right\} \\
&= \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} r_i \right) m \mid r_i \in R \right\} \\
&= \left\{ (r_1 + r_2 + ... + r_n) m \mid r_i \in R \right\}
\end{aligned}
$$

$$= \{ r'm \mid r' \in R \}$$

3) $IM \quad = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i m_i \mid a_i \in I,\ m_i \in M \right\}$

$$= \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \right) \mid a_i \in I,\ m_i \in M \right\}$$

$$= \{ (a_1 + a_2 + ... + a_n)(m_1 + m_2 + ... + m_n) \mid a_i \in I,\ m_i \in M \}$$

$$= \{ a'm' \mid a' \in I,\ m' \in M \}$$

Misalnya $R = \mathbb{Z},\ M = 2\mathbb{Z}$ sebagai modul, dan submodul $N = K = 4\mathbb{Z}$ untuk himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$. Hal ini berarti terdapat ideal $I = J = 2\mathbb{Z}$ sehingga berlaku $N = IM = 2\mathbb{Z}2\mathbb{Z} = 4\mathbb{Z}$ dan $K = JM = 2\mathbb{Z}2\mathbb{Z} = 4\mathbb{Z}$. Perhatikanlah perbedaan antara kedua definisi perkalian tersebut di bawah ini.

(i). $NK \quad = 4\mathbb{Z}4\mathbb{Z}$

$$= 16\mathbb{Z}$$

(dengan menggunakan definisi perkalian submodul biasa)

(ii). $NK \quad = (IJ)M$

$$= (2\mathbb{Z}2\mathbb{Z})2\mathbb{Z}$$

$$= 8\mathbb{Z}$$

(dengan menggunakan definisi modul perkalian di atas)

Ideal presentasi untuk suatu submodul di dalam modul perkalian tidaklah tunggal. Sebagai contohnya adalah dalam $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_5$, ideal presentasi dari submodul $\{0\}$ adalah $(5n)\mathbb{Z}$ dengan $n \in \mathbb{Z}$, yaitu $5\mathbb{Z}$, $10\mathbb{Z}$, …, dan seterusnya. Karena itu perkalian submodul-submodulnya dapat dinyatakan dalam beberapa bentuk perkalian ideal-ideal presentasi suatu submodul dengan modulnya. Misalnya $N = I_1M = I_2M = I_3M$ dan $K = J_1M = J_2M = J_3M$ maka hasil kali NK tidak bergantung dari ideal presentasinya dan dapat dinyatakan sebagai $NK = I_1J_1M = I_2J_2M = I_3J_3M$. Hal ini termuat dalam Teorema 13 di bawah ini.

Teorema 13

Misalkan $N = IM$ dan $K = JM$ masing-masing merupakan submodul di R–modul perkalian M, maka hasil kali antara N dan K independen dari ideal-ideal presentasi di N dan K.

Teorema 14

Misalkan M adalah R-modul perkalian dan N, K, T masing-masing merupakan submodul- submodul di M, maka NK merupakan submodul di M, $NK \subseteq N \cap K$ dan jika $N \subseteq K$ maka $NT \subseteq KT$.

Definisi 15 (Modul Setia)

Diberikan M adalah R-modul. R-modul M disebut modul setia (faithful) jika $Ann_R(M) = \{0\}$.

Definisi 16 (Modul Sederhana)

Diberikan M adalah R-modul setia. R-modul M disebut modul sederhana jika $M \neq \{0\}$, dan submodulnya hanya $\{0\}$ dan R-modul M sendiri.

Lemma 17

Jika M adalah R–modul sederhana dan R adalah lapangan, maka R-modul M adalah R-modul perkalian.

Teorema 18

Misalkan M adalah R-modul perkalian, maka M adalah R-modul sederhana jika dan hanya jika R adalah lapangan.

Lemma 19

Diberikan M adalah R–modul perkalian. Jika M adalah R-modul setia, maka M adalah R-modul bebas torsi.

Teorema 20

Misalkan M adalah R-modul tak nol dan M adalah R-modul setia, maka setiap submodul sejati di R-modul M adalah submodul prima jika dan hanya jika ring R adalah lapangan.

Akibat 21

Misalkan M adalah R-modul perkalian setia, maka M adalah R-modul sederhana jika dan hanya jika submodul sejati di R-modul M adalah submodul prima.

Proposisi 22

Misalkan M adalah R–modul perkalian dan $N_1, N_2, N_3, ..., N_k$ *adalah submodul-submodul di R-modul M. Misalkan N adalah submodul prima di R-modul M, maka pernyataan-pernyataan di bawah ini ekuivalen :*

(i) $N_j \subseteq N$ *untuk suatu* j *dengan* $1 \leq j \leq k$.

(ii) $\bigcap_{i=1}^{k} N_i \subseteq N$.

(iii) $\prod_{i=1}^{k} N_i \subseteq N$.

Teorema 23

Misalkan P submodul sejati di R-modul perkalian M, maka submodul P merupakan submodul prima jika dan hanya jika

$$UV \subseteq P \Rightarrow \; U \subseteq P \quad atau \; V \subseteq P$$

untuk setiap submodul U dan V di modul M.

Akibat 24

Misalkan P submodul sejati di R-modul perkalian M, maka P adalah submodul prima jika dan hanya jika

$$mm' \subseteq P \Rightarrow \; m \in P \quad atau \; m' \in P$$

untuk setiap $m, m' \in M$.

Proposisi 25

Jika M adalah R-modul perkalian, maka pernyataan-pernyataan di bawah ini ekuivalen :

1) *P adalah submodul prima.*
2) *Jika* $UV \subseteq P$ *maka* $U \subseteq P$ *atau* $V \subseteq P$ *untuk suatu submodul-submodul U dan V di R-modul M.*
3) *Jika* $mm' \subseteq P$ *maka* $m \in P$ *atau* $m' \in P$ *untuk setiap* $m, m' \in M$.

Selanjutnya, akan dibahas mengenai sifat tertutup pada perkalian (*multiplicatively closed*) pada suatu *R*-modul perkalian *M*.

Definisi 26

Diberikan M adalah R-modul perkalian. Sebuah himpunan bagian tak kosong S^* *di modul M dikatakan tertutup terhadap perkalian* *<u>(multiplicatively closed)</u>* *jika berlaku* $mn \cap S^* \neq \varnothing$ *untuk sebarang* $m, n \in S^*$.

Proposisi 27

Misalkan M adalah R-modul perkalian, maka submodul sejati N *di R-modul* M *merupakan submodul prima jika dan hanya jika himpunan* $M \setminus N$ *tertutup terhadap perkalian.*

Teorema 28

Misalkan M adalah R–modul perkalian. Jika A *submodul di M dan* S^* *adalah himpunan yang tertutup terhadap perkalian di M sehingga berlaku* $A \cap S^* = \varnothing$*, maka terdapat submodul N di R-modul M yang maksimal dengan sifat* $A \subseteq N$ *dan* $N \cap S^* = \varnothing$*. Selanjutnya, N merupakan submodul prima di R-modul M.*

Seperti halnya pada gelanggang (ring), dalam modul perkalian juga didefinisikan elemen pembagi nol dan daerah integral, yaitu sebagai berikut.

Definisi 29

Diberikan M adalah R-modul perkalian. Pembagi nol <u>*(zero divisor)*</u> *di R-modul M adalah elemen* $0_M \neq a \in M$ *dimana terdapat* $0_M \neq b \in M$ *sehingga berlaku* $ab = (Ra)(Rb) = 0_M$*. Jika M tidak memuat pembagi nol maka R-modul M disebut daerah integral.*

Teorema 30

Misalkan M adalah R–modul dan N adalah submodul sejati di M, maka N merupakan submodul prima jika dan hanya jika M / N *adalah daerah integral (tidak memuat pembagi nol).*

Definisi 31

Diberikan M adalah R-modul perkalian dan N submodul di M.

(i) *N disebut nilpoten jika* $N^k = 0$ *untuk suatu bilangan bulat positif k, dimana* N^k *berarti hasil kali dari N sebanyak k kali. Dengan kata lain, definisi hasil kali* N^k *adalah :*

$$\begin{aligned} N^k &= (IM)^k \\ &= \underbrace{(IM)(IM).....(IM)}_{k\ kali} \\ &= I^k M \end{aligned}$$

dengan I adalah suatu ideal presentasi submodul N.

(ii) *Elemen* $m \in M$ *disebut nilpoten jika* $m^k = 0$ *untuk suatu bilangan bulat positif k, dengan definisi* m^k *adalah sebagai berikut.*

$$\begin{aligned} m^k &= \underbrace{(Rm)(Rm)...(Rm)}_{k\ kali} \\ &= \underbrace{(IM)(IM).....(IM)}_{k\ kali} \\ &= I^k M \end{aligned}$$

dengan I adalah suatu ideal presentasi $m \in M$.

Himpunan semua elemen nilpoten di M dinotasikan dengan N_M .

Berikut adalah syarat perlu dan syarat cukup suatu submodul nilpoten pada *R*-modul perkalian *M*.

Teorema 32

Diberikan M adalah R-modul perkalian. Submodul N di M adalah submodul nilpoten jika dan hanya jika untuk setiap ideal presentasi I di submodul N berlaku $I^k \subseteq Ann_R(M)$ *untuk suatu* $k \in \mathbb{Z}^+$.

Akibat 33

Diberikan M adalah R-modul perkalian setia dan N adalah submodul di M. Submodul N nilpotent jika dan hanya jika setiap ideal presentasi dari submodul N adalah ideal nilpoten.

Definisi 34

Diberikan M adalah R-modul dan N adalah submodul di R-modul M. Radikal dari submodul N dinotasikan dengan $M - rad(N)$ *atau* $r(N)$ *yang didefinisikan sebagai irisan semua submodul prima di R-modul M yang memuat submodul N. Jika R-modul M tidak memuat satupun sebarang submodul prima, maka* $M - rad(N) = M$.

Teorema 35

Misalkan N submodul dari M adalah R–modul perkalian, maka

$$M - rad(N) = \left\{ m \in M \mid m^k \subseteq N \text{ untuk suatu } k > 0 \right\}$$

Akibat 36

Diberikan M adalah R-modul perkalian. Himpunan semua elemen nilpoten, N_M *adalah irisan semua submodul prima di M* $\left(r\left(\{0\}\right) = N_M \right)$.

Teorema 37

Diberikan N adalah submodul prima lemah di R-modul perkalian M. Jika $(N : M)N \neq \{0\}$, *maka N adalah submodul prima di R-modul M.*

Teorema 38

Diberikan M adalah R-modul perkalian dan N adalah submodul prima lemah di R-modul M. Jika N bukan submodul prima, maka berlaku $N^2 = \{0\}$.

Akibat 39

Jika M adalah R-modul perkalian dan N adalah submodul prima lemah di modul M, maka berlaku $N \subseteq r(\{0\})$ *atau* $r(\{0\}) \subseteq N$.

4. Kesimpulan

Beberapa hasil penting atau sifat-sifat yang dapat dijadikan sebuah kesimpulan dari tulisan ini adalah sebagai berikut :

Pada *R*-modul setia (*faithful*) *M,* jika *M* adalah *R*-modul sederhana maka *M* adalah *R*-modul perkalian. Selanjutnya jika *M* adalah *R*-modul perkalian setia maka pernyataan-pernyataan di bawah ini ekuivalen :

1. *M* adalah *R*-modul sederhana.
2. Ring *R* adalah lapangan.
3. Setiap submodul sejati di *R*-modul *M* adalah submodul prima.

Ketiga pernyataan di atas tidak ekuivalen jika *M* bukan *R*-modul perkalian. Untuk suatu *R*-modul setia *M* (bukan modul perkalian), dua hal yang pasti ekuvalen adalah nomor 2 dan nomor 3 di atas, yaitu jika *M* adalah *R*-modul setia tak nol maka *R* adalah lapangan jika dan hanya jika setiap submodul sejati di *M* adalah submodul prima.

Kaitan antara modul perkalian dan submodul prima adalah sebagai berikut. Pada *R*-modul perkalian *M* jika *P* adalah submodul sejati di *M* maka pernyataan-pernyataan di bawah ini ekuivalen :

1. Submodul P adalah submodul prima.
2. Untuk setiap submodul $U,V \subseteq M$ berlaku jika $UV \subseteq P$ maka $U \subseteq P$ atau $V \subseteq P$.
3. Untuk setiap $m,m' \in M$ berlaku jika $mm' \subseteq P$ maka $m \in P$ atau $m' \in P$.

Ketiga pernyataan di atas analog dengan pembahasan ideal prima pada ring *R*. Jika *M* bukan *R*-modul perkalian maka ketiga hal di atas tidak ekuivalen.

Kaitan antara modul perkalian, submodul prima dan daerah integral adalah sebagai berikut. Pada *R*-modul perkalian *M* jika *N* adalah submodul sejati di *M* maka pernyataan-pernyataan di bawah ini ekuivalen :

1. Submodul N adalah submodul prima.
2. *R*-modul perkalian $M \setminus N$ tertutup terhadap perkalian (*multiplicatively closed*).
3. *R*-modul perkalian (M / N) adalah daerah integral.

Antara submodul prima, submodul prima lemah dan radikal submodul pun memiliki kaitan satu sama lain. Pada *R*-modul perkalian *M* dengan *N* adalah submodul di *M* maka jika *N* adalah submodul prima maka *N* adalah submodul prima lemah. Sebaliknya, jika *N* adalah submodul prima lemah maka *N* adalah submodul prima jika $(N : M) \neq \{0\}$. Ingat kembali bahwa submodul $\{0\}$ di *R*-modul perkalian *M* selalu submodul prima lemah. Kemudian, jika *N* adalah submodul prima lemah maka $N = r(\{0\})$, yang artinya *N* adalah irisan semua submodul prima di *M*.

Itulah beberapa hal yang dapat dijadikan kesimpulan dari keseluruhan pembahasan tugas akhir ini.